「解析概論第１期末試験問題解答例と色々–7月23日」　井上 revised7.30

色々な答案があり、それらの幾つかには見るべきもの、注意すべきもの、出題の間違いを指摘しているものもあった。以下にそれらを記した。また、$\boxed{\mathbf{5}}$ の別解については、数学科と物理学科の「違い」として説明したので、是非読んで欲しい。

$\boxed{\mathbf{1}}$ (a) K を $\mathbb{R}$ 内の空でないコンパクト集合で、関数 $g: K \to \mathbb{R}$ が K の各点で上半連続、即ち、

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)(x \in \{y \in K \mid |y-a| < \delta\} \Longrightarrow g(x) < g(a) + \epsilon)$$

ならば、g は K で最大値を持つことを示せ。
(b) $K \subset \mathbb{R},\ L \subset \mathbb{R}$ を共に空でないコンパクト集合とし、$f: K \times L \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。このとき $g(x) = \min_{y \in L} f(x,y)$ は K の各点で上半連続なることを示せ。

——-

解答例：(a) [10] コンパクト集合 K で上半連続ならば g は上に有界で $\sup_{x \in K} g(x) = M < \infty$ となる（実際、もし上に有界でないとすると、数列 $\{x_n\}$ で $g(x_n) > n$ なるものが存在する。K はコンパクトだから部分列 $\{x_{n'}\}$ があって $x_0 \in K$ に収束するとしてよい。任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ があって、$|x_{n'} - x_0| < \delta$ ならば上半連続性より $n' < g(x_{n'}) < g(x_0) + \epsilon$ となる。$n' \to \infty$ として、$\infty \le g(x_0) < \infty$ となり矛盾）。
sup の定義より、点列 $\{x_n\}$ があって $M - 1/n < g(x_n) \le M$ となる。そこで、部分列 $\{x_{n'}\}$ が x_0 に収束するとすると、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって、$|x_{n'} - x_0| < \delta$ ならば $M - 1/n' < g(x_{n'}) < g(x_0) + \epsilon \le M + \epsilon$ となる。まず $n' \to \infty$ として $M \le g(x_0) + \epsilon \le M + \epsilon$、$\epsilon > 0$ は任意だったから $g(x_0) = M$ となる。
(b) [10] 点 $x_0 \in K$ で $g(x_0) = \min_{y \in L} f(x_0, y)$ とすると、$f(x_0, y)$ は y に関し L で連続だから最小値をとる点 $y_0 \in L,\ g(x_0) = f(x_0, y_0)$ がある。f はコンパクト集合 $K \times L$ 上で連続だから、一様連続である。故に、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって、$|x - x_0| + |y - y_0| < \delta$ ならば $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \epsilon$ となる。これより、$|x - x_0| < \delta/2$ ならば $|y - y_0| < \delta/2$ のとき

$$f(x,y) < \epsilon + f(x_0,y_0) = \epsilon + g(x_0) \Longrightarrow \min_{|y-y_0|<\delta/2} f(x,y) < \epsilon + g(x_0)$$

となる。一方 x が何であれ、$g(x) = \min_{y \in L} f(x,y) \le \min_{|y-y_0|<\delta/2} f(x,y)$ だから、

$$|x - x_0| < \delta/2 \text{ ならば } g(x) < \epsilon + g(x_0). \qquad \Box$$

別解：(a) 任意の $a \in K$ をとると、$\epsilon = 1$ として

$$(\exists\delta > 0)(\forall x)(x \in \{y \in K \mid |y-a| < \delta\} \Longrightarrow g(x) < g(a) + 1)$$

となる。即ち、各 $a \in K$ に開近傍 $U(a,\delta) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y-a| < \delta\}$ があって $K \subset \cup_{a \in K} U(a,\delta)$ となるから、コンパクト性より、有限個の点 $a_1, \cdots, a_N \in K$ があって $K \subset \cup_{i=1}^N U(a_i,\delta)$ となる。これより、

$$g(x) < \max_{i=1,\cdots,N} g(a_i) + 1 \quad \text{for} \quad \forall x \in K$$

となり、K 上で g は上に有界である。ココマデハ OK。

上の議論より $\sup_{x \in K} g(x) = M < \infty$ が存在する。『もしこの上限を attain する元が無い、即ち、$g(x) < M$ $(\forall x \in K)$ と仮定すると、$\max_{i=1,\cdots,N} g(a_i) < M$ となるから、ある $\eta > 0$ があって $\max_{i=1,\cdots,N} g(a_i) + \eta < M$

としてよい。これから $g(x) \le \max_{i=1,\cdots,N} g(a_i) + \eta < M$ となるが、これは M が上限であることに矛盾する。』この『$\cdots$』にはギャップがある[1]。$\{a_i\}$ は任意の $x \in K$ に対して $g(x) < \max_{i=1,\cdots,N} g(a_i) + 1$ となるように選んであるが、$g(x) \le \max_{i=1,\cdots,N} g(a_i) + \eta$ は保証されない！

(b) 次のような答案があった。これをどう判断したら良いのだろうか？

> $\min_{y \in K} f(x,y) = f(x, y(x))$ なる $y(x) \in L$ が存在する[2]。任意の $a \in K$ に対し
>
> $$\begin{aligned} g(a) - g(x) &= \min_{y \in K} f(a,y) - \min_{y \in K} f(x,y) = f(a, y(a)) - f(x, y(x)) \\ &\le f(a, y(x)) - f(x, y(x)) \le \max_{y \in L}(f(a,y) - f(x,y)) \end{aligned}$$
>
> となる。一方、f はコンパクト集合 $K \times L$ 上で（一様）連続だから、任意の $\epsilon > 0$, $y \in L$ に対しある $\delta > 0$ があって
>
> $$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(a,y) - f(x,y)| < \epsilon$$
>
> となるので、
>
> $$|x - a| < \delta \Longrightarrow g(a) - g(x) < \epsilon$$
>
> が従う。

この推論には間違いがなさそうだが $g(a) - \epsilon < g(x)$ となって求めたい式とは異なるが、これをどう解釈したら良いのだろうか。

実は、上と同じ議論で、

$$\begin{aligned} g(x) - g(a) &= \min_{y \in K} f(x,y) - \min_{y \in K} f(a,y) = f(x, y(x)) - f(a, y(a)) \\ &\le f(x, y(a)) - f(a, y(a)) \le \max_{y \in L}(f(x,y) - f(a,y)) \end{aligned}$$

より

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow g(x) - g(a) < \epsilon$$

が従うが、これは正に求めたい式である。

> この結論は『f は点 $(a, y(a))$ で連続だから、$y(a)$ を固定し、任意の $\epsilon > 0$ に対して $|x - a| < \delta$ のとき $f(x, y(a)) < f(a, y(a)) + \epsilon$ となる。故に、$g(x) = \min_{y \in L} f(x,y) \le f(x, y(a)) < g(a) + \epsilon$』という説明でも良い。

実は以下の定理が成立する：

定理 0.1 関数族 $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の各関数 f_λ が点 a で上半連続（または下半連続）ならば $f(x) = \inf_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ は a で上半連続（または下半連続）である。

注意：下半連続の定義は書いていないが、上の記述からそれが何であるか推定できるであろう。

＝＝＝この問題に対するおまけ＝＝＝

[1] 野村先生による指摘

[2] 勿論 $\min_{y \in K} f(x,y) = f(x,z)$ となる z は一つとは限らないが、そうなる z のうちで、例えば最小のものを $y(x)$ と記した

定理 0.2 $K \subset \mathbb{R}^n$, $L \subset \mathbb{R}^m$ を共に空でないコンパクト集合とし、$f: K \times L \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。このとき

(i) $\max_{x\in K} \min_{y\in L} f(x,y) \le \min_{y\in L} \max_{x\in K} f(x,y)$ の両辺が存在し、この不等式が成立する。

(ii) さて、$(a,b) \in K \times L$ が f の鞍点であるとは、*(a)*$f(x,b) \le f(a,b)$ $(\forall x \in K)$ かつ *(b)* $f(a,b) \le f(a,y)$ $(\forall y \in L)$ なることとする。*(i)* において等号が成立する必要十分条件は f が鞍点をもつことである。更に、*(i)* における等号の値は $f(a,b)$ である。

注意：不連続な上半連続関数の易しい例は以下のようにして作れる：まず $f \in C([a,b])$ として $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \neq c \in (a,b), \\ \gamma & \text{if } x = c \text{ with } \gamma > f(c) \end{cases}$$

と定める。この例から、このような不連続点が有限個のときはどうか、もし可算無限個だとどうなるか、色々考えると楽しいのでは。以下の関数は $x = 0$ で上半連続かどうか調べよ。

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \ge 0, \\ 0 & \text{if } x < 0, \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{if } x \le 0, \end{cases} \quad \eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0, \\ 1/2 & \text{if } x = 0, \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

＝＝＝おまけ終＝＝＝

======

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\{a_n\}, \{b_n\}$ を数列とする。

（い）$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する事を示せ。

（ろ）$\exists \lim_{n\to\infty} a_n$ ならば $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$ を示せ。

（は）$a_n > 0$, $b_n > 0$ ならば $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$ という主張は正しいか？正しければ証明を、正しくなければ反例を挙げよ。

——

解答例:（い）[5] 定義から $\bar{a}_n = \sup_{k\ge n} a_n$, $\underline{a}_n = \inf_{k\ge n} a_n$, $\bar{a} = \inf_n \bar{a}_n = \lim_n \bar{a}_n$, $\underline{a} = \sup_n \underline{a}_n = \lim_n \underline{a}_n$ とおく。すると $\underline{a}_n \le a_n \le \bar{a}_n$ だから、lim をとると $\limsup_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} a_n$ が存在し等しいから、挟み撃ちの原理で $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在し、その値は γ となる。

（ろ）[5] $c_n = a_n b_n$ とおき（は）で用いた記法を用いると、『任意の n に対し $\bar{c}_n = \sup_{k\ge n} c_n \le \sup_{k\ge n} a_n \sup_{k\ge n} b_n = \bar{a}_n \bar{b}_n$ となる』。$\sup_{k\ge n}$ をとると、$\bar{c}_n \le \bar{a}_n \bar{b}_n$ となる。更に $\lim_n$ をとると、

$$\limsup_n c_n = \lim_n \bar{c}_n \le \lim_n \bar{a}_n \cdot \lim_n \bar{b}_n = \lim_n a_n \cdot \limsup_n b_n.$$

この（ろ）は <u>間違い</u> であることが小林瑠加君の指摘で判明した。即ち、$a_n = n^{-1}(-1)^n$, $b_{2m} = 1$, $b_{2m+1} = -2(2m+1)$ とすると、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\limsup_{n\to\infty} b_n = 1$ であり、一方 $a_{2m} b_{2m} = (2m)^{-1}$, $a_{2m+1} b_{2m+1} = 2$ だから $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 2$ となる。もし望みの式が成立すれば $2 = \limsup_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n = 0$ となるので、矛盾。故に、<u>一般の数列では望みの式（ろ）は成立しない</u>。

とすると、（ろ）の証明のどこに問題があるのか？『$a_n > 0, b_n > 0 \Longrightarrow \sup_n b_n \le \sup_n a_n \cdot \sup b_n$』は正

しい[3]が、仮定 $a_n > 0, b_n > 0$ がないと一般には正しくない[4]。この議論が仮定 $a_n > 0, b_n > 0$ なしで（ろ）の『$\cdots$』で使われているので間違いが生じているのか？山田耕史君は $a_n = 1/n > 0,\ b_n = n > 0$ のときを考え、仮定 $a_n > 0, b_n > 0$ があっても（ろ）が成立しないことを注意している。

但し、$a_n > 0,\ b_n > 0$ かつ $\limsup_{n\to\infty} b_n < \infty$ ならば（ろ）は成立する。その証明が上の解答例である。

（は）[5] 補完実数の中での $\pm\infty$ を含んだ演算は、問題用紙に記しておいた。$\limsup_n a_n < \infty, \limsup_n b_n < \infty$ とすると不等式が成立していることは、（い）、（ろ）と同様にして示される。しかし、どちらかが $\pm\infty$ 或いは 0 のときは幾分まずい。例えば、$a_n = 1/n,\ b_n = n^2$ とすると $\infty \le 0 \times \infty$ であり、$a_n = 1/n^2,\ b_n = n$ とすると $0 \le 0 \times \infty$ となるからである。もし $0 \times (\pm\infty) = 0$ と定義するならば、不等式が成立しているとは言えなくなるし、未定義のままだと「比較できない」からである。

注意：$\limsup_{n\to\infty} a_n$ を $\lim(\sup_n a_n)$ と考えているかのような答案があった。とすると、記号として $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ を用いた方が良かった。丁度 $\sin^{-1} x$ と書くと $1/\sin x$ と思う人が必ず出るのと似ている。

======

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^2-級で $f(0) = 0$ を満たすものとする。このとき

$$g(x) = \begin{cases} f(x)/x & x \neq 0, \\ f'(0) & x = 0 \end{cases} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

と定義すると、$g \in C^1$ であることを示せ。

——

解答例 [15]：$x \neq 0$ では $g'(x) = f'(x)/x - f(x)/x^2$ であるから、$x \neq 0$ で g は微分可能で微分したものは連続である。また任意の $x \neq 0$ に対して ξ があって $f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2 f''(\xi)/2 = xf'(0) + x^2 f''(\xi)/2$、$\xi \in (0, x)$ となる。故に、f が C^2-級だから

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{g(x) - f'(0)}{x} = \frac{f''(\xi)}{2} \to \frac{f''(0)}{2}\ (x \to 0) \quad \text{即ち} \quad \exists g'(0) = \frac{f''(0)}{2}$$

となり、$g'(0)$ が存在する。次に $x \neq 0$ で $g'(x) = (xf'(x) - f(x))/x^2$ に注意し、$f'(x) = f'(0) + xf''(\zeta)$、$\zeta \in (0, x)$ となることを用いると、

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0}[x(f'(0) + xf''(\zeta)) - (xf'(0) + x^2 f''(\xi)/2)]/x^2 = \lim_{x\to 0}[f''(\zeta) - f''(\xi)/2] = f''(0)/2 = g'(0).$$

故に、$g'(x)$ は $x = 0$ で連続である。

注意：$g'(0)$ が存在することと、$\lim_{x\to 0} g'(x)$ が存在しそれが $g'(0)$ と等しくなることは別々に調べるべきこと。

======

$\boxed{\mathbf{4}}$ (a) 点 $P = (X, Y, Z)$ から定平面 $T_p : \ell x + my + nz = p\ (\ell^2 + m^2 + n^2 = 1)$ への距離 $d((X, Y, Z), T_p)$ を Lagrange 未定乗数法を用いて求めよ。

(b) 点 $P = (X, Y, Z)$ が楕円面 $X^2/a^2 + Y^2/b^2 + Z^2/c^2 = 1$ 上を動く時、点 P と定平面 $T_p : \ell x + my + nz = p$ $(\ell^2 + m^2 + n^2 = 1)$ の距離の最大値を求めよ。

[3] $\sup_n a_n = \alpha, \sup_n b_n = \beta$ とすると、任意の n で $0 < a_n \le \alpha, 0 < b_n \le \beta$ だから $0 < a_n b_n \le \alpha\beta$ となる。故に、$\sup_n a_n b_n \le \alpha\beta$

[4] $a_n = -1,\ b_n = (-1)^n$ とすると $\sup a_n = -1, \sup b_n = 1, \sup a_n b_n = 1$ だから $1 = \sup a_n b_n \le \sup a_n \cdot \sup b_n = -1$ となり矛盾

——

解答例 [20]：(a) 点 $P=(X,Y,Z)$ から定平面 T_p $\ell x+my+nz=p$ への距離を $d_{T_p}(X,Y,Z)=d(P,T)$ と書く。これを Lagrange 未定乗数法で求めよう。このために

$$\Psi(x,y,z:\mu)=(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2-\mu(\ell x+my+nz-p)$$

とおく。この関数の極値点があれば、そこでは

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=\frac{\partial\Psi}{\partial y}=\frac{\partial\Psi}{\partial z}=\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}=0$$

となっていなくてはならない。故に、その点で

$$-2(X-x)-\mu\ell=0,\ -2(Y-y)-\mu m=0,\ -2(Z-z)-\mu n=0,\ \ell x+my+nz-p=0$$

となる。最小値が存在しそれが極値点であることは明らかであろう。$\ell^2+m^2+n^2=1$ を用い、

$$X-x=\mu\frac{\ell}{2},\ Y-y=\mu\frac{m}{2},\ Z-z=\mu\frac{n}{2},$$

にそれぞれ ℓ,m,n を掛けたものと、両辺を 2 乗したものを用いると簡単に

$$d_{T_p}(X,Y,Z)=d(P,T)=|p-\ell X-mY-nZ|$$

となる。

(b) 次に、

$$\Phi(X,Y,Z;\lambda)=d_{T_p}(X,Y,Z)^2-\lambda\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}-1\right)$$

とおき、上と同様に極値点の候補を求める。

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X}=\frac{\partial\Phi}{\partial Y}=\frac{\partial\Phi}{\partial Z}=\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=0$$

となる。その極値点では

$$2\ell(\ell X+mY+nZ-p)-\lambda\frac{2X}{a^2}=0,\ 2m(\ell X+mY+nZ-p)-\lambda\frac{2Y}{b^2}=0,$$
$$2n(\ell X+mY+nZ-p)-\lambda\frac{2Z}{c^2}=0,\ \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}-1=0$$

だから $\ell X+mY+nZ=\gamma$ とおいて

$$\lambda=\gamma(\gamma-p),\gamma-p=\frac{\lambda X}{a^2\ell}=\frac{\lambda Y}{b^2m}=\frac{\lambda Z}{c^2n}$$

となる。故に、$\gamma^2=a^2\ell^2+b^2m^2+c^2n^2$ であり、求める量は

$$|p-\gamma|=|p\pm\sqrt{a^2\ell^2+b^2m^2+c^2n^2}|$$

となる。この値の大きい方が求めるものとなることは明らかだから、$p>0$ に注意すれば $p+\sqrt{a^2\ell^2+b^2m^2+c^2n^2}$ となる。

注意：点から平面までの距離の公式は高校時代に勉強したであろうが、点から平面までの垂線の長さが一番短い、からという考察無しで公式が導かれていることに注意して欲しい。

======

$\boxed{5}$ 長さ ℓ の単振子の周期 T は、$T=2\pi\sqrt{\ell/g}$ (g は重力加速度) で与えられる。このとき ℓ と T の測定値から、g の値を求めることを考える。もし、ℓ と T の測定誤差がそれぞれ 1%, 2% 以下ならば、g の測定誤差はほぼ 5% 以下に押さえられることを示せ。

——

解答例 [20] ：$g(\ell,T)=\frac{4\pi^2\ell}{T^2}$ だから、ある $0<\theta<1$ があって

$$g(\ell+\Delta\ell,T+\Delta T)=g(\ell,T)+E,$$

とすると誤差項は

$$E=\Delta\ell\frac{\partial g}{\partial\ell}(\ell+\theta\Delta\ell,T+\theta\Delta T)+\Delta T\frac{\partial g}{\partial T}(\ell+\theta\Delta\ell,T+\theta\Delta T)$$

と書ける。一方

$$\frac{\partial g}{\partial\ell}(\ell,T)=\frac{4\pi^2}{T^2},\quad \frac{\partial g}{\partial T}(\ell,T)=-\frac{8\pi^2\ell}{T^3}$$

となる。T,ℓ の測定誤差は $|\Delta T|\le 0.02T$, $|\Delta\ell|\le 0.01\ell$ だから、

$$\big|E\big|\le 0.01\ell\frac{4\pi^2}{(T+\theta\Delta T)^2}+0.02T\frac{8\pi^2(\ell+\theta\Delta\ell)}{(T+\theta\Delta T)^3}\le\frac{4\pi^2\ell}{T^2}(0.01+2\times1.01\times0.02)\le 0.0504\frac{4\pi^2\ell}{T^2}$$

となるから、ほぼ５％の誤差として良い。ここで少し荒い評価

$$\ell\frac{4\pi^2}{(T+\theta\Delta T)^2}\le\frac{4\pi^2\ell}{T^2},\quad \frac{8\pi^2(\ell+\theta\Delta\ell)T}{(T+\theta\Delta T)^3}\le 2\frac{4\pi^2\ell}{T^2}\times1.01$$

を用いた。

別解１ [10 点]：素朴な計算で、誤差範囲を求める。

$$g<\frac{4\pi^2 1.01\ell}{(0.98T)^2}=\frac{1.01}{0.98^2}g<1.05165g,$$

$$g>\frac{4\pi^2 0.99\ell}{(1.02T)^2}=\frac{0.99}{1.02^2}g>0.95155g$$

より、誤差は５％程度。これは誤差が 4.84〜5.17 ％だから、５％程度とは言いにくいのでは？故に減点。

別解２ [10 点]：$g=4\pi^2\ell T^{-2}$ より、それの微分は

$$dg=4\pi^2T^{-2}d\ell-8\pi^2\ell T^{-3}dT$$

となる。仮定

$$|d\ell|\le\frac{1}{100}\ell,\quad |dT|\le\frac{2}{100}T$$

より誤差は

$$|dg|\le 4\pi^2\ell T^{-2}\left(\frac{1}{100}+2\times\frac{2}{100}\right)=\frac{5}{100}g$$

である。

この論法で <u>幾分気になるのは「微分」dg は「誤差」Δg と同義語だろうかである？</u>それに、何故問題文で「<u>ほぼ</u> ５％」としてあるのだろうか？

問題点の解明：Taylor の定理より

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+\frac{h^2}{2}f''(x+\theta h)$$

となるが、「物理」では $h = dx$ と書いて

$$df = f(x+dx) - f(x) = f'(x)dx \, (+\tfrac{(dx)^2}{2} f''(x+\theta dx) \text{ は } dx \text{ に比べ高位の無限小だからネグって})$$

と説明して「誤差」としているのだろう[5]。1 %の誤差と言っているが、もし有効数字 2 ケタある機器ならば、1.00 %の誤差かもしれない。すると、Taylor の定理を用いた計算の 5.04 %の誤差まで測定でき、決してピッタリ 5 %ではないからである。物理的には dg を無限小と言いつつ、無限小ではない 1 %の誤差を無限小としているところが「上の議論で dg を誤差として良いのか」という問題点なのである。

======

成績評価：中間 20、演習 30、期末 90 という配点で 60 点以上を可とし、120 点以上をすべて 100 点とし $60 \le x \le 120$ の場合は $60 + 2(x-60)/3$ 点とする。尚、感想文があれば $55 \le x \le 60$ は 60 点とする。（但し、演習を受けたくても受けられなかったであろう物理の人には、中間＋期末の持ち点を 14/11 倍した後に上の操作をした）。

履修申告者 73 名、期末試験受験者 38 名、合格者 19 名、不合格者 19 名であり、中間のみ受験者 3 名、演習のみ受験者 1 名であった。

以下の諸君は成績優秀（≥ 80）であった。

阿部直、池田宙紀、古賀智裕、小林瑠加、鈴木貴士、谷本祥、
坪田識稔、福富平記、山田耕史（あいうえお順、敬称略）

追試験：希望者があれば、追試験を実施し、実施日は HP に掲載する予定である。

この教科は 数学科必修科目 なのだから内容を理解することが必要だし、追試がそれを促進するきっかけとなることを期待したい。また、物理学科の諸君の大部分は講義から早めにドロップアウトしてしまったが、この程度で懲りて欲しくない、再度の挑戦を歓迎する（数学で優秀な成績を収めた物理学者は多い）。

この試験は 100 点満点とし、前回一応合格した者もより良い理解を求めて挑戦することを推奨する。成績は、今回の成績と追試のそれの、より高い点数の方とする。希望者は 1 名の場合でも実施するが、準備の都合もあるので 10 月 31 日までに当方まで e-mail で連絡すること。

[5] ここは著者の独断と偏見かもしれない？